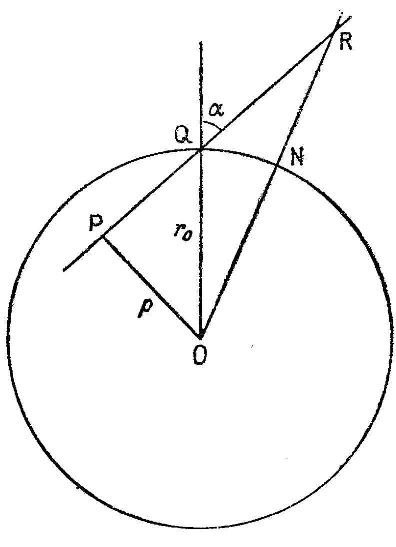
К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОЗОНА В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ*

Вопрос о возможности однозначного вывода закона распределения озона по высоте в земной атмосфере был поставлен Rosseland'ом. Однако им не дано полного решения этого вопроса и даже высказано сомнение в однозначности решения. Мы покажем ниже, что некоторые величины, характеризующие распределение озона (например, высота центра тяжести слоя озона, толщина слоя и др.) могут быть получены однозначно и дадим формулы для их получения. Пусть на поверхности Земли (см. фиг. 1) в точке Q расположен наблюдатель. Пусть $n(r)$ есть число молекул озона в 1 куб. сантиметре на расстоянии r от центра земли. Сосчитаем, чему равно число атомов N внутри бесконечного цилиндра, осью которого служит луч QR и поперечное сечение равно 1 *см*².



Фиг. 1.

Допустим при этом, что луч QR образует угол α с направлением на зенит. Очевидно, что N будет функцией α или связанной с ней величины $p = OP = r_0 \sin\alpha$, где r_0 есть радиус земли. Мы имеем:

$$N = \int_0^\infty n\,ds,$$

где $s = QR$. Из чертежа видно, что

$$s + PQ = \sqrt{r^2 - p^2}.$$

---

* Бюлл. КИСО, № 5—6, 29, 1933.

Так как для данного луча PQ и p постоянны

$$ds = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

Поэтому

$$N(p) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{n(r)\, rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \tag{1}$$

Подстановкой

$$t = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2; \quad s = \left(\frac{p}{r_0}\right)^2; \quad \frac{N}{r_0} = K$$

это уравнение приводится к виду

$$K(s) = \frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} \frac{n(t)\, dt}{\sqrt{t - s}}. \tag{2}$$

Мы получаем интегральное уравнение первого рода с постоянными пределами (а не уравнение типа Abel'я, как это получалось у Rosseland'a). Величина s изменяется в пределах $(0,1)$, между тем как t меняется в пределах $(1, \infty)$. Поэтому, если путем преобразования переменных добиться того, чтобы t и s менялись в одинаковых пределах, симметрия ядра будет нарушена.

Оставляя в стороне вопрос об однозначности решения уравнения (2), мы попытаемся извлечь, по крайней мере, некоторые сведения о функции $n(r)$ из уравнения (1). Введем высоту над поверхностью земли h. Тогда $r = r_0 + h$ и

$$\sqrt{r^2 - p^2} = \sqrt{(r_0 + h)^2 - r_0^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{r_0^2\cos^2\alpha + 2hr_0 + h^2} =$$

$$= r_0 \cos\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(2\frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}.$$

Так как на высоте выше 100 *км* плотность озона близка к нулю, то в уравнении (1) интегрирование может быть доведено практически лишь до этой высоты.

Между тем для $\sec^2\alpha < 30$ при $h < 100$ *км* выражение

$$\frac{rdr}{\sqrt{1 + \sec^2\alpha\left(2\frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}} = \frac{(r_0 + h)\, dh}{\sqrt{1 + \sec^2\alpha\left(2\frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}}$$

может быть разложено в ряд по степеням $\sec^2\alpha\left(2\frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)$.

Мы имеем

$$\frac{(r_0+h)\,dh}{\sqrt{1+\sec^2\alpha\left(2\dfrac{h}{r_0}+\dfrac{h^2}{r_0^2}\right)}}=(r_0+h)\left[1-\frac{1}{2}\sec^2\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\sec^4\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)^2-\frac{15}{48}\sec^6\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)+\cdots\right]dh.$$

Интегрируем почленно

$$N(\alpha)=\int_0^\infty n(h)\frac{r_0+h}{r_0}\sec\alpha\left[1-\frac{1}{2}\sec^2\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\sec^4\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)-\frac{15}{48}\sec^6\alpha\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)^3+\cdots\right]dh=$$

$$=\sec\alpha\int_0^\infty\left(1+\frac{h}{r_0}\right)n(h)\,dh-$$

$$-\frac{1}{2}\sec^3\alpha\int_0^\infty\left(1+\frac{h}{r_0}\right)\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)n(h)\,dh+ \tag{3}$$

$$+\frac{3}{8}\sec^5\alpha\int_0^\infty\left(1+\frac{h}{r_0}\right)\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)^2 n(h)\,dh-$$

$$-\frac{15}{48}\sec^7\alpha\int_0^\infty\left(1+\frac{h}{r_0}\right)\left(2\frac{h}{r_0}+\frac{h^2}{r_0^2}\right)^3 n(h)\,dh+\cdots$$

Допустим, с другой стороны, что мы имеем разложение $N(\alpha)$ по степеням $\sec\alpha$

$$N(\alpha)=A\sec\alpha-B\sec^3\alpha+C\sec^5\alpha-D\sec^7\alpha+\cdots \tag{4}$$

Величины A, B, C, $D,\cdots$ пусть определяются из наблюденной кривой $N(\alpha)$. Сравнивая (3) и (4), мы можем найти интегралы, входящие в правую часть (3).

Обозначим теперь:

$$N_0=\int_0^\infty n(h)\,dh;\quad a=\int_0^\infty n(h)\frac{h}{r_0}\,dh;\quad b=\int_0^\infty n(h)\frac{h^2}{r_0^2}\,dh;$$

$$c = \int_0^\infty n(h) \frac{h^3}{r_0^3} dh \cdots \tag{5}$$

Сравнивая (3), (4) и (5), найдем

$$\begin{aligned} A &= N_0 + a; \\ B &= a + \frac{3}{2} b + \frac{1}{2} c; \\ C &= \frac{3}{2} b + 3c + \cdots; \\ D &= \frac{5}{6} c + \cdots; \end{aligned} \tag{6}$$

где многоточием обозначены члены, содержащие

$$\int_0^\infty n(h) \left(\frac{h}{r_0}\right)^m dh,$$

в которых $m > 3$.

Решая уравнения (6), начиная с последнего, мы найдем величины N_0, a, b, c $\left(\text{пренебрегая, конечно, при этом высшими степенями } \frac{h}{r_0}\right)$.

Найденные числа a, b, c имеют довольно простой физический смысл: N_0 есть число молекул озона в вертикальном столбе с основанием в 1 *см*^{2}. Далее из a и N_0 мы можем вычислить точную высоту центра тяжести этого столба озона h_0. В самом деле:

$$h_0 = \frac{\int n(n)\, h dh}{\int n(h)\, dh} = \frac{a r_0}{N_0}.$$

Далее мы можем вычислить среднее квадратичное отклонение от центра тяжести, каковая величина будет характеризовать „толщину" слоя озона:

$$\sigma^2 = \frac{\int n(h)(h - h_0)^2 dh}{\int n(h)\, dh} = \frac{b r_0^2 - 2h_0 a r_0 + h_0^2 N_0}{N_0} =$$

$$= \frac{b}{N_0} r_0^2 - \frac{2a^2 r_0^2}{N_0^2} + \frac{a^2 r_0^2}{N_0^2} = \frac{b}{N_0} r_0^2 - \frac{a^2}{N_0^2} r_0^2,$$

т. е. „толщина“ слоя будет равна

$$\sigma = r_0 \sqrt{\frac{b}{N_0} - \frac{a^2}{N_0^2}}\,.$$

Точно так же можно получить величину среднего кубического отклонения и т. д.

Таким образом, зная из наблюдений $N(\alpha)$, можно во всяком случае получить некоторые характеристики закона распределения озона с высотой.

Нужно, однако, отметить, что само определение чисел $N(\alpha)$ представляет собой чрезвычайно трудную задачу. В самом деле: если мы определяем их из наблюдений спектра Солнца в течение суток, то откуда мы можем быть уверены в постоянстве распределения озона в течение суток? Однако обсуждение этого вопроса не является предметом настоящей статьи.